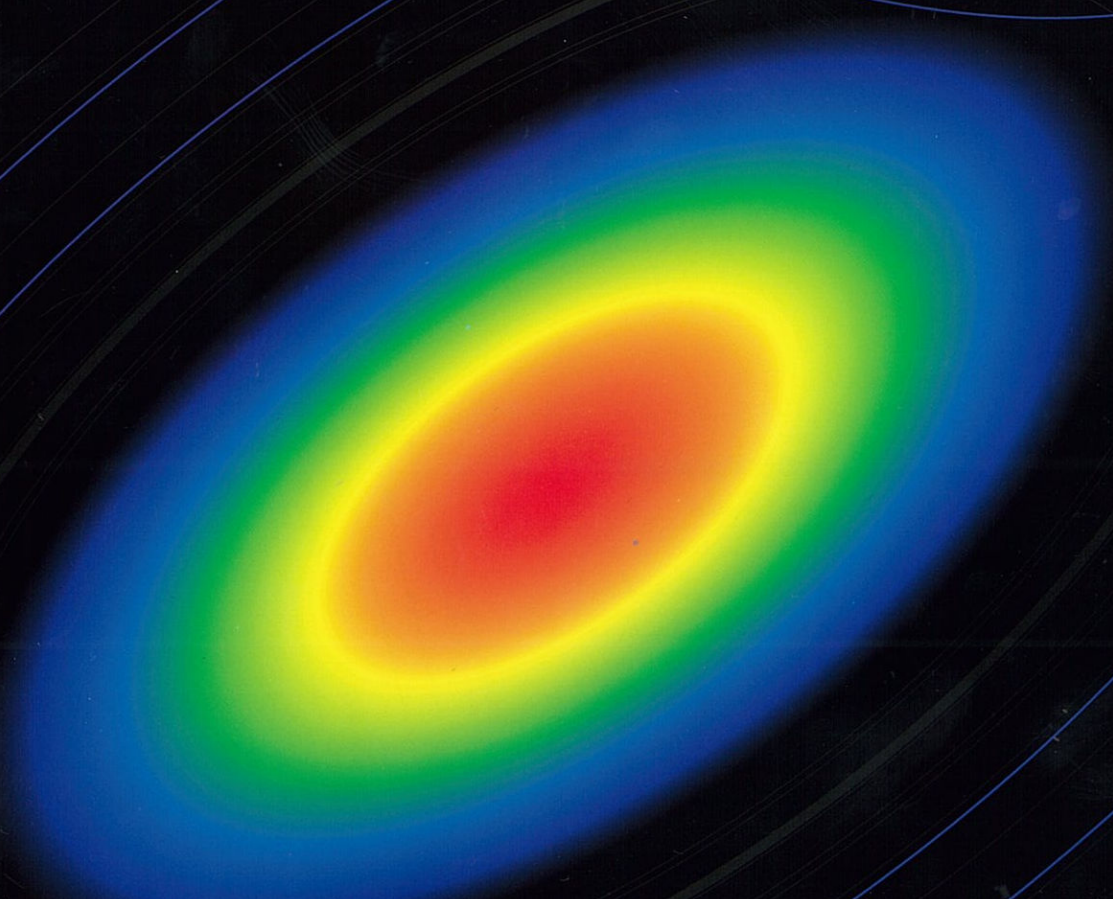


伝 熱

Journal of the Heat Transfer Society of Japan

ISSN 1344-8692 Vol. 50, No. 210
2011. 1



JHSJ

◆特集：ふく射を放射する，ということ

射度法を用いた熱ふく射平衡に関する一考察

近藤 良夫[†] 山下 博史[‡]Theoretical Analysis of Thermal Radiative Equilibrium
by a Radiosity MethodYoshio KONDO[†] and Hiroshi YAMASHITA[‡]

Abstract

We propose a theoretical consideration of thermal radiative equilibrium by using a radiosity method. According to G. Kirchhoff's research on cavity radiation, the condition of radiative equilibrium arises in the cavity in which the interior wall temperature is kept uniform. Furthermore, by considering the balance of energy on the wall surfaces in the cavity, a relationship "emittance ε = absorptance α " is obtained. In the present study, adversely, we developed a method to prove the conclusion "uniformity and uniqueness of radiative equilibrium in the cavity (independent of the emittance of the interior wall surfaces)" by considering the relationship " $\varepsilon = \alpha$ " on the wall surfaces to be a supposition. We proved by using a concept of radiosity that the radiosities on the interior wall surfaces can be kept uniform in the enclosed system of thermal radiative equilibrium. This knowledge is useful for the inspection of benchmarks of various programs for radiative analysis.

Key Words: Enclosed System, Thermal Radiation, Radiosity, Thermal Equilibrium

1 緒言

ふく射の放射および吸収という物理現象を理解する上でのひとつの考え方を提案する。空洞内のふく射エネルギー収支については、G. Kirchhoffにより、壁面温度均一の閉空間がふく射平衡であることを前提として、黒体の概念が導入されている。さらにそこでのエネルギー収支を考察することで、吸収率および放射率を α および ε として、任意の放射面について「 $\varepsilon = \alpha$ 」という性質が導かれる[1]。

本報ではその考察とは逆に、「 $\varepsilon = \alpha$ 」を仮定として取り扱い、結論として「空洞ふく射の均一性と一意性」を導く証明方法を見出した。この証明には射度の概念を用い、空洞ふく射の均一性と一意性は、射度の均一性と一意性という形で表現される。当該事項は以下のようにまとめることができる。すなわち多面からなる閉空間内のふく射エネルギー収支

に関し、

定理 1 :

すべての面 i で $\varepsilon_i = \alpha_i$ であれば、すべての面でふく射平衡が成立している場合には、すべての面の温度は等しい。またそのとき、すべての面の射度も等しく、その値は当該面温度の黒体放射能に一致する。

定理 2 :

すべての面 i で $\varepsilon_i = \alpha_i$ であれば、すべての面の温度が等しい場合には、すべての面でふく射平衡となる。またそのとき、すべての面の射度も等しく、その値は当該面温度の黒体放射能に一致する。

上記「仮定」は「結論」とは独立に定義可能で、証明自体は熱力学的平衡の概念(熱平衡のとき温度が等しいということ)を前提としなくとも成立する。

受付日: 2010年1月28日, 担当エディター: 花村 克悟

[†] 日本ガイシ(株) (〒467-8530 名古屋市瑞穂区須田町2番56号)

[‡] 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

また、当該知見は、各種ふく射解析コードのベンチマーク的検証のための理論的根拠として、適用が可能であると考えられる。

2 Kirchhoffの法則

熱ふく射に関する Kirchhoff の法則は、次のように表現される[2,3].

ふく射平衡状態にある物質の、表面が放出する放射能 E と表面の吸収率 α との比は物質に関係なく一定で、その値は黒体の放射能 E_B に等しく、温度と放射の波長（振動数）のみの関数である。このとき、表面の放射率 ε を $\varepsilon = E/E_B$ と定義すれば $\varepsilon = \alpha$ となる。

ここで、ふく射平衡の状態は、通常、一定の温度を有する壁面で囲まれた空洞内において実現されるとしている。空洞内のふく射平衡状態が壁面温度のみに依存し、壁面材質に依存しないという前提が重要であり、そうなった空洞内の電磁場のスペクトル分布が、同温度の理想化された放射体（黒体）からの放射のスペクトル分布と比例関係をなす、という論証の過程を経て、最後に $\varepsilon = \alpha$ が示される。

3 証明に関わる前提

3.1 証明の内容

以下の証明を試みる。

多面から構成される閉空間内の各壁面において、

定義 a) 吸収率 α_i (後述) と放射率 ε_i (式(1))

仮定 b) 各面 i で $\varepsilon_i = \alpha_i$

仮定 c) 射度法による閉空間系のふく射エネルギー交換モデル(式(2)~(4))

の下で、

結論 a) ふく射平衡のときすべての壁面温度は均一である

結論 b) すべての壁面温度が均一であるときふく射平衡である

結論 c) ふく射平衡のときふく射場の状態は一意に決まる (温度のみに依存し材質によらない)

が得られる。

なお本報証明の範疇においては、結論 c) 中の「材質」とは内壁面放射率の意味で用いる。

3.2 吸収率と放射率の定義

本証明における吸収率 α_i と放射率 ε_i の意味を明確

化する。まず吸収率 α_i は、任意の面に入射するふく射が物質内部に吸収される (熱に変わる) 割合と定義する。3.3 節においては、外来照射量 J_i に対する吸収分である。したがって、 $1 - \alpha_i$ は任意面における反射率である。

次に放射率 ε_i は、任意面の放射に関して (その面温度のみに依存する) 上限量 E_B を定義し、それに対する任意面の実際の放射量の割合と定義する (式(1))。 E_B , ε および α は振動数の関数とする。なお、ここでの E_B については、必ずしも空洞内のふく射平衡と関連付けられるものではなく、単に上限値としての意味で使用される。したがって、すでにその関数形は見出されているが、以降の証明においてはその関数形を規定する必要はなく「(各振動数ごとに) 温度のみに依存する増加関数」という仮定で十分である。要するに、任意面の放射エネルギーには当該面の温度に応じた上限値の縛りがある、という事象を仮定として議論を進める。

一方後述するが、Kirchhoff の考察においては空洞内ふく射平衡が前提であるため、 E_B はそこでの電磁場と結び付けられて定義される。

3.3 射度を用いた定式化

多数の表面 (面ごとに異なる物質であり、異なる温度を有する可能性がある) からなる閉空間系におけるふく射伝熱を考える。閉空間のふく射エネルギー交換を論ずる場合の手段として、射度という概念が図 1 により導入されている。すなわち、ある面 i からの単位面積あたり単位時間の総放出量は「当該面自身の放射量 E_i 」と「外来照射量 (表面に入射する総ふく射エネルギー) J_i の反射分」との和になり、この和を射度 G_i と定義する。

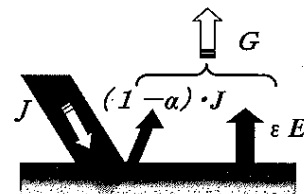


Fig. 1 Radiosity.

図 1 の関係は、次の式群にまとめられる。

$$E_i = \varepsilon_i E_{B,i} \quad (1)$$

$$G_i = E_i + (1 - \alpha_i) J_i \quad (2)$$

$$J_i = \sum_j F_{ij} G_j \quad (3)$$

ここで F_{ij} は面 i から j を見た形態係数である。式(1)は前述のように放射率の定義でもある。なお式(1)~(3)の成立においては着目する各面において完全拡散放射, 完全拡散反射, さらにはふく射の偏光の等方性が前提となっている。

また, ある面 i の正味のふく射エネルギー交換量は, 面 i の面積を A_i として次式で表される。

$$Q_i = (E_i - \alpha_i J_i) A_i = (G_i - J_i) A_i \quad (4)$$

式(1)~(4)を閉空間を囲む複数の面に連立して適用したものは, 「射度法による閉空間系のふく射エネルギー交換モデル」と呼ばれている[4]。特に, 多数の面からなるふく射系がふく射平衡状態となると, すべての内壁面の正味のふく射エネルギー交換量はゼロ $Q_i=0$ でなければならない。またこのとき, 閉空間を囲む壁の状態としては, その厚みが十分に厚く外部とは断熱状態であるか, もしくは, 4章で考察するような特別な条件が必要となる。

3.4 証明の趣旨

本報においては, 熱力学的平衡の概念等を前提とせずに, 3.1節の仮定のみから結論を導く新たな現象の捉え方を議論する。本証明における「仮定」のうち主要部は b) である。これ自体についても, 3.2節の定義と同様, 空洞内ふく射平衡と必ずしも関連付けられるものではない。「個々の材質が仮定 b) という性質を普遍的に保有している」という事象を, 単に, 論証の仮定として扱うことは自由である。このことから, 以下の議論は循環論法ではないことは明らかである。

4 等材質モデルによる簡易的考察

空洞ふく射の成立条件を考え推論の見通しをよくすることを鑑み, 簡易モデルによる思考実験を行う。特に, 3.2節での放射率と吸収率の定義のみでは, 結論の一部が導けないことを明確化する。熱力学的平衡の概念を前提としても結論 c) は少なくとも自明ではない。それは次のようにしてわかる。

図2にふく射平衡を実現すると考えられる2種類の閉空間を示す。これらは内壁面のみ全体に均一な発熱速度 (Q [W/m^2]) をもち, 周囲を均一な材質で囲まれた, 内部が真空の球状空間である。閉空間1と2では発熱速度, 壁内部の物性値および外壁面の熱伝達条件を同一とし, 内壁面の放射率のみが異なると仮定する。以下両者の定常状態において議論すれ

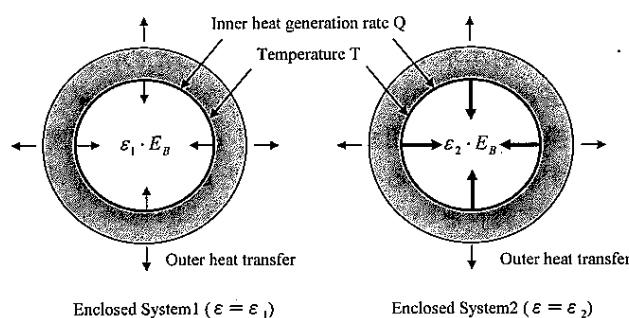


Fig. 2 Thermal radiative equilibrium in enclosed system.

ば, 閉空間1と2ともに, 点対称の境界条件を持つため, 壁における熱伝導の理論より, それぞれの空洞内で内壁面温度は均一になるはずである。さらに, 内壁面温度均一であることから, 内部がそれぞれふく射平衡状態となること(結論 b)を認めるとすると, すべての内壁面上で見かけ上エネルギーの流入がなくなるため, 内壁面上における発生熱量はすべて外壁方向に流れる。その結果, 前記仮定および熱伝導の理論より, 内壁面温度および壁内の(半径方向の)温度分布は, 閉空間1と2で同一になる。

まず, 3.1節の仮定 b) を考慮せず, $\epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$ とし, 内壁吸収率を双方とも1とする。その場合, 内部でのふく射エネルギー収支は E_i の定義から, 図2のように, 閉空間1と2で内壁面温度が同一であっても, 面からの(それぞれの閉空間において均一な)放射量 (=吸収量) が異なった形でエネルギー平衡を保つことになる。いずれもエネルギー収支上は問題ない。 E_i の定義においては, 各面の放射エネルギーの上限値を規定しているので, 閉空間内のふく射平衡状態は一意に決まりそうだが, この前提のみでは上限があると規定しているだけで, 平衡時に各面の放射が必ず上限になるとは言っていない。むしろ, 上の例で見たように, 同一温度の放射面でもその放射率によって面自身の放射量は異なることになるので, 結論 c) が必ずしも自明でないことが理解される。

結局, 仮定 b) を導入することにより, 初めて結論 c) を含むすべてが確保される(この確認には証明が必要であり, 次章でその証明を行う)。以上の考察は, 仮定 b) と空洞ふく射の一意性とが, ある種の対等関係を保有している可能性を示唆している。

図2のように, 均一放射率の面に囲まれた閉空間ではこのような思考実験も比較的容易であるが, 多面間になると非常に困難である。こうした状況を

踏まえ、以下において一般的な証明を試みる。多面間のふく射エネルギー交換に対応するため、証明には仮定 c)の射度法による閉空間系のふく射エネルギー交換モデルを使用する。仮定 c)は各面の射度を規定するものであるが、仮定 b)と比較すると、「論理的な定義」という性格を強く持つ。

5 証明

以下の証明においては、単色ふく射系として考え、振動数を ν として、 E_B, ε および α はそれぞれ $\nu \sim \nu + d\nu$ の間にある電磁波に対する値、という意味で取り扱う。 $d\nu$ は十分に小さいものとする。なお、射度法による定式化における式(1)~(4)もその意味で取り扱う。

5.1 結論 a)の証明

面の数を n とする。式(1)~(3)より、

$$G_i = \varepsilon_i E_{B,i} + (1 - \alpha_i) \sum_j F_{ij} G_j \quad (5)$$

また、形態係数については次式が成立する。

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}, \quad \sum_j F_{ij} = 1$$

すべての面でふく射平衡 (単色ふく射平衡) が成立しているとする、

$$G_i = J_i$$

このとき、式(2)より、 $G_i = \varepsilon_i E_{B,i} + (1 - \alpha_i) G_i$ となり、結局、 $\alpha_i G_i = \varepsilon_i E_{B,i}$ が得られる。ここで、「各面 i で $\varepsilon_i = \alpha_i$ 」という条件を課すと次式が得られる。

$$G_i = E_{B,i}$$

式(5)より、すべての面 i について次式が成立する。

$$E_{B,i} = \varepsilon_i E_{B,i} + (1 - \varepsilon_i) \sum_j F_{ij} E_{B,j}$$

よって、

$$E_{B,i} - \sum_j F_{ij} E_{B,j} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

式(6)の左辺に、たとえば $i = 1$ の場合の次式

$$-E_{B,1} + \sum_j F_{1j} E_{B,j} = 0$$

を加えると、

$$(E_{B,i} - E_{B,1}) - \sum_j F_{ij} (E_{B,j} - E_{B,1}) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

すなわち

$$\sum_j (\delta_{ij} - F_{ij}) (E_{B,j} - E_{B,1}) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

ただし、上式において δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

式(7)を i について加えると、

$$\sum_i \sum_j (\delta_{ij} - F_{ij}) (E_{B,j} - E_{B,1}) = 0$$

$$\sum_j \left\{ \sum_i (\delta_{ij} - F_{ij}) \right\} (E_{B,j} - E_{B,1}) = 0$$

$$\sum_j \left\{ 1 - \sum_i F_{ij} \right\} (E_{B,j} - E_{B,1}) = 0$$

$$\therefore \sum_j \{0\} (E_{B,j} - E_{B,1}) = 0 \quad (7')$$

すなわち、式(7') は恒等的に成立する。したがって、式(7)のうち一つの式は除かなければならない。また式(7)で、 $E_{B,j} - E_{B,1}$ を含む左辺第1項は $j = 1$ のときは恒等的にゼロである。したがって、

$$\sum_{j=2}^n (\delta_{ij} - F_{ij}) (E_{B,j} - E_{B,1}) = 0 \quad i = 2, \dots, n$$

この $E_{B,j} - E_{B,1}$ ($j = 2, \dots, n$) に関する同次連立一次方程式でゼロでない解が存在するためには、係数行列式がゼロでなければならない。この係数行列式 $\det f$ は、 $F_{ii} = 0$ の場合、次式のように表される。

$$\det f = \begin{vmatrix} 1 & -F_{23} & -F_{24} & \dots & -F_{2n} \\ -F_{32} & 1 & -F_{34} & \dots & -F_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -F_{n2} & -F_{n3} & -F_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (8)$$

ここで、係数行列 f の各行で、

$$\sum_{j=2}^n |F_{ij}| < \sum_{j=1}^n |F_{ij}| = 1$$

であるため、非対角成分の絶対値の和が、対角成分 = 1 よりも小さいことがわかる。したがって、係数行列は対角優位行列で正則となり [5]、

$\det f \neq 0$ より $E_{B,j} - E_{B,1}$ はすべてゼロとなる。

すなわち、

$$E_{B,1} = E_{B,2} = \dots = E_{B,n}$$

よって、 E_B の定義によりすべての面の温度は等しい。また、

$$G_i = E_{B,i} = \text{const.} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{Q.E.D.})$$

5.2 結論 b) の証明

結論 b) の仮定より, すべての面において,

$$E_{B,i} = E_B = \text{const.} \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

とおける. ここで, 各面の射度が有限値をとることを自明とすれば (付録参照), 面 i において適当な比例定数 $\hat{\epsilon}_i$ を使用することにより, すべての面において, $G_i = \hat{\epsilon}_i E_B$ と表示できる. 式(5)より, 「各面 i で $\epsilon_i = \alpha_i$ 」を課すと

$$G_i = \epsilon_i E_B + (1 - \epsilon_i) \sum_j F_{ij} \hat{\epsilon}_j E_B = \hat{\epsilon}_i E_B$$

となる. さらに,

$$\hat{\epsilon}_{i,all} = \sum_j F_{ij} \hat{\epsilon}_j \quad (10)$$

とおくと,

$$G_i = \epsilon_i E_B + (1 - \epsilon_i) \hat{\epsilon}_{i,all} E_B = \hat{\epsilon}_i E_B$$

よって,

$$\epsilon_i + (1 - \epsilon_i) \hat{\epsilon}_{i,all} = \hat{\epsilon}_i \quad (11)$$

ここで, $\hat{\epsilon}_i$ の最大値 ($i = \max$) および最小値 ($i = \min$) を考えると, 次式が成立する.

$$\hat{\epsilon}_{\min} \leq \hat{\epsilon}_i \leq \hat{\epsilon}_{\max} \quad (12)$$

また式(10)において,

$\hat{\epsilon}_{\min,all}$: $\hat{\epsilon}_{i,all}$ の最小値をとる面の $\hat{\epsilon}_{i,all}$

$\hat{\epsilon}_{\max,all}$: $\hat{\epsilon}_{i,all}$ の最大値をとる面の $\hat{\epsilon}_{i,all}$

$F_{\min,j}$: $\hat{\epsilon}_{i,all}$ の最小値をとる面から他面 j をみた形態係数

$F_{\max,j}$: $\hat{\epsilon}_{i,all}$ の最大値をとる面から他面 j をみた形態係数

とすれば, 下記の関係が成立する.

$$\hat{\epsilon}_{\min,all} = \sum_j F_{\min,j} \hat{\epsilon}_j \geq \sum_j F_{\min,j} \hat{\epsilon}_{\min} = \hat{\epsilon}_{\min}$$

$$\hat{\epsilon}_{\max,all} = \sum_j F_{\max,j} \hat{\epsilon}_j \leq \sum_j F_{\max,j} \hat{\epsilon}_{\max} = \hat{\epsilon}_{\max}$$

したがって,

$$\hat{\epsilon}_{\min} \leq \hat{\epsilon}_{\min,all}, \quad \hat{\epsilon}_{\max,all} \leq \hat{\epsilon}_{\max} \quad (13)$$

式(11)の右辺に式(13)を用いると,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\min} + (1 - \epsilon_{\min}) \hat{\epsilon}_{\min,all} &\leq \hat{\epsilon}_{\min,all} \\ \hat{\epsilon}_{\max,all} &\leq \epsilon_{\max} + (1 - \epsilon_{\max}) \hat{\epsilon}_{\max,all} \\ \epsilon_{\min} (1 - \hat{\epsilon}_{\min,all}) &\leq 0, \quad 0 \leq \epsilon_{\max} (1 - \hat{\epsilon}_{\max,all}) \end{aligned}$$

$$\therefore 1 \leq \hat{\epsilon}_{\min,all}, \quad \hat{\epsilon}_{\max,all} \leq 1 \quad (14)$$

一方, 式(11)に式(14)を用いると

$$\hat{\epsilon}_{\min} = \epsilon_{\min} + (1 - \epsilon_{\min}) \hat{\epsilon}_{\min,all}$$

$$\hat{\epsilon}_{\max} = \epsilon_{\max} + (1 - \epsilon_{\max}) \hat{\epsilon}_{\max,all}$$

$$\therefore \hat{\epsilon}_{\max} \leq 1, \quad 1 \leq \hat{\epsilon}_{\min} \quad (15)$$

式(15)が式(12)に矛盾しないためには, $\hat{\epsilon}_{\min} = \hat{\epsilon}_{\max} = 1$ でなければならない. したがって, すべての面で $\hat{\epsilon}_i = 1$ となる. よって, すべての面において,

$$G_i = \hat{\epsilon}_i E_B = E_B$$

この結果,

$$J_i = \sum_j F_{ij} G_j = E_B$$

よって,

$$Q_i = (G_i - J_i) A_i = E_B - E_B = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{Q.E.D.})$$

5.3 結論 c) の証明

結論 c) に関しては, 結論 a) および b) の証明にいずれも付随する形で示される. すなわち結論 a) および b) は互いに逆の関係にあるため, 3.1 節の仮定 b) のもとでは, ふく射平衡状態はすべての面の温度が等しい状態でしか成立しないことになる. さらに各証明において, ふく射平衡時にすべての面で「射度」が, 仮定における放射量の上限值 E_B となっている. ここで, E_B は温度のみの関数と規定したため, 空間内のふく射を各面の射度という物理量で代表させれば, それは平衡時に内壁面放射率に依存せず, (均一な) 壁面温度のみに依存して一意に定まることになる. 要するに, いかなる複数の壁面 (それぞれが任意の放射率を持つ) で構成された空間であっても, 壁面温度が同一であれば, 内部におけるふく射平衡の状態は変わらない. 放射率の小さい壁面では, 自身の放射量が少ない分を反射が補って均一化しているという見方もできる.

以上により, 「各面 i で $\epsilon_i = \alpha_i$ 」という仮定のもとでは, 閉空間におけるふく射平衡状態は, その内壁面すべてが均一温度になった条件でのみ一意的に実現することが証明された.

6 考察

6.1 Kirchhoffの法則との関連

Kirchhoffの考察においては, 3.1節の「結論の3つ」を前提として「仮定b)」を導いた形となる. 熱力学的平衡の概念を前提とすれば結論a) は自明であり, 結論b) も通常は自明として扱われる. また結論のc) については, 2つの異なる空洞を連結させたモデルにより, 熱力学第2法則を前提とした背理法により証明が試みられている[6,7]. それにより, 平衡状態における空洞内電磁波のエネルギー u の一意性 (空洞の大きさや材質によらない) を明確化したうえで, 空洞の内壁面において電磁波と壁面とのエネルギーの授受を考察し, 式(16)および(17)を導く.

$$\frac{E_i(\nu, T)}{\alpha_i(\nu, T)} = \frac{c}{4} \cdot u(\nu, T) \quad (16)$$

ここで

E_i : 壁材質 i のときの放射能

α_i : 壁材質 i のときの吸収率

c : 光速

$u(\nu, T)$: 空洞ふく射 (ふく射平衡) 時のエネルギー密度

ν : 振動数

T : 温度

式(16)右辺の u が壁の材質に依存していないのが重要な点で, この右辺を特に E_B と記載し移項すれば

$$\frac{E_i}{E_B} = \alpha_i \quad (17)$$

となり式(17)の左辺を放射率と定義して関係「 $\epsilon_i = \alpha_i$ 」(3.1節の仮定b))に到達する. この関係は壁面(物質)に関するものである. 空洞内ふく射平衡の一意性から式(16)を導く際には, 着目する壁面に入射するすべての方向からの電磁波のエネルギーを積分する操作が必要である[2]. これは, 空間内の電磁波のエネルギーをもとに壁面の放射エネルギーを導く操作と見ることが可能であり, この意味においては, 式(16)および(17)の導出過程における Kirchhoff の考察は「空洞(空間)の性質」を前提として「壁面(物質)の性質」を導いたものであると解釈することができる. 特に, 式(16)で振動数に依らず $\alpha_i \equiv 1$ とおけば, その物質はすべての入射を吸収することを意味し, それを黒体とよんでいる. またそのとき式(16)より, 物質からの放射としての $E_i = E_B$ (黒体放射)

は, 平衡状態にある空洞内の電磁波のエネルギーである u と, 振動数の関数としてのスペクトル分布において比例関係をなすことが理解される.

一方, 本報における解析的証明によって得られた内容は, 逆に3.1節の「定義および仮定」を前提として「結論の3つ」を導いた形となる. さらには, 3.1節の「結論」の真偽が本報の趣旨ではなく, 当該「結論」を3.1節の「定義および仮定」のみから導く証明法が趣旨である. 結果, 得られた知見は必然的に「仮定と結論が結ばれた命題」という形での表現となる. いずれも Kirchhoff の法則に反するものではないが, 壁面(物質)の性質である「 $\epsilon_i = \alpha_i$ 」を出発点として, 平衡条件としての空洞(空間)の性質を導いた形となっているため, 前節の考察も含めると, (電磁波のエネルギー自身を考慮していない形の証明ではあるが) Kirchhoff の法則が導かれる過程の逆の証明という性格を持つ.

以上を鑑みれば, 以下の2つの主張

- 主張 1) 閉空間において「内壁温度均一」と「ふく射平衡」は同値であり, そのふく射エネルギー収支の状態は内壁面放射率によらない.
- 主張 2) 任意の物質で放射率と吸収率は等しい.

は, 同等の内容の換言であるという解釈が可能である. 特に主張 1) には熱力学的平衡の概念が包括されているが, 本報では主張 2) より主張 1) を導いているため, 放射率および吸収率の定義を含めた主張 2) が, 熱力学的平衡の概念も含めた空洞ふく射の均一性および一意性と対等の関係にある可能性を示唆している.

6.2 数値計算との関連

「射度法による閉空間系のふく射エネルギー交換モデル: 式(1)~(4)」を基本とした数値モデル[8]は特に加熱炉内の熱解析に有効であり, それについて多くの文献[8, 9]および解析例[10, 11]が報告されている. 当該解析は一般的には非平衡系を対象としたものとなるが, 本報における考察は, そうしたふく射解析コードを検証する上での理論的基礎 (ベンチマーク的事項) として, 認識すべき内容であると考える.

一例を挙げると, 前述の数値モデル[8]により別途行った数値計算において, 本報の証明を支持する計算結果を得ている. すなわち, 「ある面 j のみで $\epsilon_j \neq$

α_j という前提を課して、数値的にふく射平衡状態を形成すると、当該面温度の値が必ず他と異なる、という計算結果が示される。すなわち、ふく射平衡状態であるのに各面の温度が異なるということになり、これは現実的ではなく、熱力学的平衡の概念に反する現象である。すなわち、「各面 i で $\varepsilon_i = \alpha_i$ 」と仮定することにより、確かに熱力学的平衡の概念に反しない結果が得られることの一端が示唆されている。逆に、あるプログラムを使用して「各面 i で $\varepsilon_i = \alpha_i$ 」と仮定した計算において、ふく射平衡状態で各面の温度が異なる結果が得られたのであれば、当該プログラムに何らかの問題が存在する可能性がある。

7 結 言

以上の結論を下記に 2 つの定理としてまとめる。なお放射量の上限值はすでに一般化している黒体放射能という用語で置き換えた。

多面からなる閉空間内のふく射エネルギー収支に関し、

定理 1 :

すべての面 i で $\varepsilon_i = \alpha_i$ であれば、すべての面でふく射平衡が成立している場合には、すべての面の温度は等しい。またそのとき、すべての面の射度も等しく、その値は当該面温度の黒体放射能に一致する。

定理 2 :

すべての面 i で $\varepsilon_i = \alpha_i$ であれば、すべての面の温度が等しい場合には、すべての面でふく射平衡となる。またそのとき、すべての面の射度も等しく、その値は当該面温度の黒体放射能に一致する。

以上の考察および証明は、G. Kirchhoff によるふく射平衡に関する考察の逆手順の提示という側面を持ち、応用面においては、各種ふく射解析コードのベンチマーク的検証のための理論的根拠として、適用が可能であると考えられる。

参考文献

[1] Maekawa, T. et al., *Netsufukusha to Ryoushi (Butsurigaku Koten Ronbun Sousho ; 11)*, (1970), 567-571, Tokai University Press (in Japanese).
 [2] Fujiwara, K., Hyodo, T., *Introduction to Thermal*

Physics, (1998), 166-167, University of Tokyo Press.
 [3] Harashima, A., *Netsurikigaku / Toukeirikigaku*, (1978), 75-77, Baifuukan (in Japanese).
 [4] Nishikawa, K., Fujita, Y., *Dennetsugaku*, (1999), 309-322, Rikougakusha (in Japanese).
 [5] Wylie, C.R., *Advanced Engineering Mathematics*, (1975), 508-509, McGraw-Hill Book Company.
 [6] Ingram, D.J.E., *Radiation and Quantum Physics*, (Translated by Hijikata, K.), (1977), 48-49, Maruzen (in Japanese).
 [7] Fujiwara, K., Hyodo, T., *Introduction to Thermal Physics*, (1998), 164-165, University of Tokyo Press.
 [8] Kondo, Y., Yamashita, H., Aoki, M., *45th National Heat Transfer Symposium of Japan*, 3 (2008-6), 805-806.
 [9] Kondo, Y., JIRA Report, 20-4, (2009), 7-10.
 [10] Modest, M.F., *Radiative Heat Transfer*, 2ndEd., (2003), Academic Press.
 [11] Siegel, R., Howell, J. R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, 4th Ed., (2002), Taylor & Francis.

付 録

5.2 節の結論 b) の証明に関する補足

5.2 節の結論 b) の証明において、各面の射度が有限値をとることを自明とした(有限値をとらない場合は考慮外)が、この前提の下で、各面における、式(5)を用いた射度に関する展開式が実際に有限値に収束するか否かを考察する。なおここでは下記式(18)において各式を逐次代入する操作を明確化するため、面番号を x_i の如く記載している。

仮定 b) の「各面 x_i で $\varepsilon_{xi} = \alpha_{xi}$ 」という条件を課して、例えば面 x_1 において式(5)を繰り返し用いると、式(9)より

$$\begin{aligned} G_{x_1} &= \varepsilon_{x_1} E_B + (1 - \varepsilon_{x_1}) \sum_{x_2} F_{x_1 x_2} G_{x_2} & (x_1, x_2 = 1, \dots, n) \\ G_{x_2} &= \varepsilon_{x_2} E_B + (1 - \varepsilon_{x_2}) \sum_{x_3} F_{x_2 x_3} G_{x_3} & (x_2, x_3 = 1, \dots, n) \\ G_{x_3} &= \varepsilon_{x_3} E_B + (1 - \varepsilon_{x_3}) \sum_{x_4} F_{x_3 x_4} G_{x_4} & (x_3, x_4 = 1, \dots, n) \\ &\vdots & \end{aligned} \tag{18}$$

式(18)において代入操作を実行すると、 G_{x_1} は最終項のみ G_{x_m} を含む級数に展開できる。例示すると3項までの展開は式(19)となり、4項までの展開は式(20)となる。

$$G_{x_1} = \varepsilon_{x_1} E_B + (1 - \varepsilon_{x_1}) \sum_{x_2} F_{x_1 x_2} \varepsilon_{x_2} E_B + (1 - \varepsilon_{x_1}) \sum_{x_2} F_{x_1 x_2} (1 - \varepsilon_{x_2}) \sum_{x_3} F_{x_2 x_3} G_{x_3} \quad (19)$$

$$G_{x_1} = \varepsilon_{x_1} E_B + (1 - \varepsilon_{x_1}) \sum_{x_2} F_{x_1 x_2} \varepsilon_{x_2} E_B + (1 - \varepsilon_{x_1}) \sum_{x_2} F_{x_1 x_2} (1 - \varepsilon_{x_2}) \sum_{x_3} F_{x_2 x_3} \varepsilon_{x_3} E_B + (1 - \varepsilon_{x_1}) \sum_{x_2} F_{x_1 x_2} (1 - \varepsilon_{x_2}) \sum_{x_3} F_{x_2 x_3} (1 - \varepsilon_{x_3}) \sum_{x_4} F_{x_3 x_4} G_{x_4} \quad (20)$$

同様に、 m 項までの展開における最終項 G^m は

$$G^m = (1 - \varepsilon_{x_1}) \sum_{x_2} F_{x_1 x_2} (1 - \varepsilon_{x_2}) \sum_{x_3} F_{x_2 x_3} \dots \times (1 - \varepsilon_{x_{m-2}}) \sum_{x_{m-1}} F_{x_{m-2} x_{m-1}} (1 - \varepsilon_{x_{m-1}}) \sum_{x_m} F_{x_{m-1} x_m} G_{x_m}$$

となるが、 G_i がすべて有限値であればその中で最大値が存在するため、それを新たに

$$G = \max_{x_m} G_{x_m} \quad (x_m = 1, \dots, n)$$

とおき、さらに各面の放射率のうち最小のものを

$$\varepsilon = \min_{x_m} \varepsilon_{x_m} \quad (x_m = 1, \dots, n)$$

とおくと、

$$G^m \leq (1 - \varepsilon_{x_1}) \sum_{x_2} F_{x_1 x_2} (1 - \varepsilon_{x_2}) \sum_{x_3} F_{x_2 x_3} \dots \times (1 - \varepsilon_{x_{m-2}}) \sum_{x_{m-1}} F_{x_{m-2} x_{m-1}} (1 - \varepsilon_{x_{m-1}}) G \leq (1 - \varepsilon)^{m-1} G$$

ここで($0 < \varepsilon \leq 1$)より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^{m-1} \cdot G = 0 \quad \therefore \lim_{m \rightarrow \infty} G^m = 0$$

以上より G_{x_1} は、上記展開の極限において最終項がゼロになるため、式(19)および(20)に示した級数の規則性についての類推から明らかなように、 E_B に比例する項のみで構成される級数となる。この議論はすべての面 x_i について同様である。ここで各面の放射率のうち最大のものを

$$\bar{\varepsilon} = \max_{x_m} \varepsilon_{x_m} \quad (1 \leq x_j \leq n) \quad (1 \leq j \leq m-1)$$

として、以上の論考をふまえれば

$$G_{x_i} \leq E_B (\bar{\varepsilon} + (1 - \bar{\varepsilon}) \bar{\varepsilon} + (1 - \bar{\varepsilon})^2 \bar{\varepsilon} + (1 - \bar{\varepsilon})^3 \bar{\varepsilon} + \dots) \quad (21)$$

が成立する。式(21)で、右辺の級数 S は

$0 < \bar{\varepsilon} \leq 1, 0 < \varepsilon \leq 1$ を考慮して、

$$S = E_B \bar{\varepsilon} \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}} = E_B \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

という形で収束する。すなわち式(21)左辺(各面射度)も有限値に収束する。

この結論は、各面の射度が有限値を持つという前提に矛盾しないため、式(5)の正当性を示す。ひいては結論b)の証明において、式(5)の適用に妥当性を与えるものとして補足追記した。